ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de problemas 4

Diagonalización de matrices

1. Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables sobre $\mathbb{R}$ y, en caso afirmativo, encontrar matrices D diagonal y P inversible tales que $A = PDP^{-1}$:

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal cuya matriz respecto de la base canónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar los valores de a para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

   b) Para $a = 3$ encontrar las matrices D diagonal y P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

3. Considérese la matriz

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & -2b \\ -1 & 1 & 2 \\ -b & 0 & 2b \end{pmatrix},$$

   que depende del parámetro real b.

   a) Determinar los valores de b para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

   b) Para $b = 0$ encontrar las matrices D diagonal y P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

   c) Como aplicación del apartado *b*), calcular A^n (en el caso $b = 0$) para cualquier n natural.

4. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por

$$f(x, y, z) = (\alpha x - \alpha y + 3z, -2\alpha x + 2\alpha y + z, 3z),$$

   donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Calcular la matriz A de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Determinar los valores de α para los que A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

   c) Para $\alpha = -1$ encontrar las matrices D diagonal y P invertible tales que $A = PDP^{-1}$.

   d) Como aplicación del apartado *c*), calcular A^n (en el caso $\alpha = -1$) para cualquier n natural. Se pide expresar todos los elementos de A^n en función de n, de la forma más simplificada posible.

5. Considérese la matriz
$$A = \begin{pmatrix} b & 2 & 0 \\ 2 & b & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
que depende del parámetro real b.

   a) Estudiar, según los valores de b, cuándo la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
   b) Para el caso $b = 1$, encontrar matrices D (diagonal) y P (inversible) tales que $D = P^{-1}AP$.
   c) Como aplicación del apartado *b*), calcular A^n (en el caso $b = 1$) para cualquier n natural. Se pide expresar todos los elementos de A^n en función de n, de la forma más simplificada posible.

6. Considérese la matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
que depende del parámetro real a.

   a) Estudiar, según los valores de a, cuándo la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
   b) Para el caso $a = 1$, encontrar matrices D (diagonal) y P (inversible) tales que $D = P^{-1}AP$.
   c) Como aplicación del apartado *b*), calcular A^n (en el caso $a = 1$) para cualquier n natural. Se pide expresar todos los elementos de A^n en función de n, de la forma más simplificada posible.

7. Considérese la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$$
que depende del parámetro real a.

   a) Estudiar, según los valores de a, cuándo la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
   b) Para el caso $a = 3$, encontrar matrices D (diagonal) y P (inversible) tales que $D = P^{-1}AP$.
   c) Como aplicación del apartado *b*), calcular A^n (en el caso $a = 3$) para cualquier n natural. Se pide expresar todos los elementos de A^n en función de n, de la forma más simplificada posible.

8. Considérese la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & b \end{pmatrix}$$
que depende del parámetro real b.

   a) Estudiar, según los valores de b, cuándo la matriz es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
   b) Para el caso $b = 2$, encontrar matrices D (diagonal) y P (inversible) tales que $D = P^{-1}AP$.
   c) Como aplicación del apartado *b*), calcular A^n (en el caso $b = 2$) para cualquier n natural. Se pide expresar todos los elementos de A^n en función de n, de la forma más simplificada posible.