

ÁLGEBRA LINEAL

Hoja de problemas 2

Espacios vectoriales. Cambio de base.

1. Estudiar si los siguientes conjuntos son subespacios vectoriales de los espacios vectoriales dados. En caso afirmativo, hallar una base del subespacio.

(a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + 2z = 3x + y = 0\}$ de \mathbb{R}^3 .

(b) $W = \{M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}) \mid M = M^T\}$ de $\mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$.

(c) $W = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) \mid 2p(0) - p(1) = 2\}$ de $P_2(\mathbb{R})$.

2. Estudiar si:

(a) $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 0, -3)\}$ es base de \mathbb{R}^3 .

(b) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $B = \{-x^2 + x + 5, 3x^2 + 5x + 3, 2x^2 + 2x - 1\}$ es base de $P_2(\mathbb{R})$.

3. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se considera el subespacio vectorial formado por los polinomios $p(t)$ que verifican

$$p'(1) = 0, \quad p'(2) = 0.$$

Hallar una base de dicho subespacio.

4. Calcular el espacio nulo y el espacio de columnas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Dados los vectores $v_1 = (1, 2, -1, 1)$, $v_2 = (2, 3, -1, 2)$, $v_3 = (1, 3, -2, 1)$ y $v_4 = (2, 1, 1, 2)$ de \mathbb{R}^4 , se pide:

(a) Estudiar si son base de \mathbb{R}^4 .

(b) De no ser así, ampliar a una base de \mathbb{R}^4 y obtener las coordenadas del vector $v = (4, 1, 0, 1)$ en dicha base.

6. Dada la base de \mathbb{R}^3

$$B_1 = \{(1, 0, -2), (0, 2, 1), (1, 1, -2)\},$$

hallar las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1 , siendo B_c la base canónica de \mathbb{R}^3 ,

$$B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

Dado el vector $u = (1, -1, 3)$, calcular sus coordenadas en B_1 .

7. En el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 se consideran las bases:

$$B_1 = \{(0, 2, 2), (2, 0, -1), (3, 0, 0)\} \quad \text{y}$$

$$B_2 = \{(2, 0, 2), (1, 2, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- (a) Hallar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 .
- (b) Dado el vector u de coordenadas $(1, 1, 1)$ respecto de la base B_1 , calcular sus coordenadas en B_2 .

8. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 1 con coeficientes reales se consideran la base $B_1 = \{t, 1\}$ y la base $B_2 = \{1 + t, 1 - t\}$.

Se pide:

- (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1 (indicando claramente cuál es una y cuál es otra).
- (b) Dado el polinomio $p(t) = t + 3$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_2 .

9. En el espacio vectorial real $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ se considera la base

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hallar la matriz de cambio de base de la base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ a B_1 , y calcular las coordenadas de $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ en B_1 .

10. En el espacio de las matrices cuadradas de orden 2 con elementos reales se consideran la base canónica B_c y la base

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se pide:

- (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1 .
- (b) Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_1 .

11. Dada la siguiente base de \mathbb{R}^4 :

$$B = \{(1, 0, 2, 1), (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 2, 1), (1, -1, 0, 1)\},$$

se pide hallar la matriz de cambio de base de B a la base canónica de \mathbb{R}^4 , la matriz de cambio de base de la base canónica de \mathbb{R}^4 a B , y las coordenadas del vector $(1, -2, 0, 1)$ en B .

12. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se consideran la base canónica $B_c = \{1, t, t^2, t^3\}$ y la base $B_1 = \{t^2 + t^3, t + t^2, t, 1\}$.

Se pide:

- (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_c y de B_c a B_1 .
- (b) Dado el polinomio $1 + t + t^2 + t^3$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_1 .

13. En el espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3 con coeficientes reales se consideran la base $B_1 = \{t^3, t^2, t, 1\}$ y la base $B_2 = \{t^3, t + t^2, 1 + t, 1\}$.

Se pide:

- (a) Calcular las matrices de cambio de base de B_1 a B_2 y de B_2 a B_1 .
- (b) Dado el polinomio $t^3 + t^2 + t$, usar la matriz de cambio de base adecuada para calcular sus coordenadas en la base B_2 .