ÁLGEBRA LINEAL
Hoja de problemas 1
Sistemas de ecuaciones lineales. Eliminación gaussiana. Cálculo de la matriz inversa.

1. Aplicar la factorización $A = LU$ para resolver el sistema lineal $Ax = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

y $b = (5, 21)^T$.

2. Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

hallar la factorización $A = LDL^T$, donde D es una matriz diagonal y L es triangular inferior con unos en la diagonal principal.

3. Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

hallar la factorización $A = LDL^T$.

4. Dada la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 5 \\ -2 & 5 & 30 \end{pmatrix},$$

hallar la factorización $A = LDL^T$.

5. Sea A la matriz de Pascal de orden 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}.$$

Aplicar la factorización $A = LU$ para resolver el sistema lineal $Ax = b$, donde $b = (8, 20, 40, 70)^T$.

6. Sea A la siguiente matriz tridiagonal de orden 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplicar la factorización $A = LU$ para resolver el sistema lineal $Ax = b$, donde $b = (3, 6, 6, 7)^T$.

7. Sea A la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Se pide hallar la factorización LDL^T de la matriz A y de su matriz opuesta $-A$.

De los resultados se deduce que A es definida positiva y $-A$ es definida negativa.

8. Sea A la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

(a) Hallar la factorización $A = LDL^T$. (b) Hallar, mediante el mtodo de Gauss-Jordan, la inversa de A (si existe).

9. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Mediante el método de Gauss-Jordan, calcular las inversas de A, de B y de AB, y comprobar que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

10. Sea A la siguiente matriz cuadrada de orden 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Mediante el método de Gauss-Jordan, calcular las inversas de A y de su traspuesta A^T, y comprobar que $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

11. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la factorización $A = LU$.

(b) Aplicar la factorización hallada en (a) para resolver el sistema lineal $Ax = (1, 3, 0)^T$.

12. Sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \\ 2 & 11 & k \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar para qué valores de k la matriz B es singular.

(b) Hallar los valores de k para los que $Bx = (2, 9, 13)^T$ tiene infinitas soluciones, y para esos casos escribir la solución general de dicho sistema.

(c) Hallar los valores de k para los que $Bx = (2, 9, 13)^T$ tiene exactamente una solución, y hallar dicha solución.

(d) Para $k = 11$, hallar los valores de c para los que $Bx = (2, 6, c)^T$ tiene solución.

13. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Hallar la solución general de $Ax = 0$.

(b) Hallar la solución general de $Ax = (2, 4, 0)^T$.

(c) Hallar la ecuación lineal que deben verificar b_1, b_2 y b_3 para que el sistema $Ax = (b_1, b_2, b_3)^T$ tenga solución.